International Mathematical Olympiad
Preliminary Selection Contest — Hong Kong 2005

國際數學奧林匹克
2005 香港選拔賽

5th June 2005

2005 年 6 月 5 日

Time allowed: 3 hours

時限：3 小時

Instructions to Candidates:

考生須知：

1. Answer ALL questions.
   本卷各題全答。

2. Put your answers on the answer sheet.
   請將答案寫在答題紙上。

3. The use of calculators is NOT allowed.
   不可使用計算機。

1. Let a_1, a_2, …, a_n be integers ($n>1$) satisfying $a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1a_2\cdots a_n=2005$. Find the smallest possible value of n. (1 mark)
設 a_1、a_2、…、a_n 為整數（$n>1$），使得 $a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1a_2\cdots a_n=2005$。求 n 的最小可能值。（1 分）

2. ABC is an acute-angled triangle. D is a point on BC such that $BD:DC=2:3$, while E is a point on AC such that $AE:EC=3:4$. AD and BE meet at F. Find $\frac{AF}{FD}\times\frac{BF}{FE}$. (1 mark)
ABC 是銳角三角形。D 是 BC 上的一點，使得 $BD:DC=2:3$。E 是 AC 上的一點，使得 $AE:EC=3:4$。AD 交 BE 於 F。求 $\frac{AF}{FD}\times\frac{BF}{FE}$。（1 分）

3. Find the value of $\frac{1}{1+1^2+1^4}+\frac{2}{1+2^2+2^4}+\frac{3}{1+3^2+3^4}+\cdots+\frac{100}{1+100^2+100^4}$. (1 mark)
求 $\frac{1}{1+1^2+1^4}+\frac{2}{1+2^2+2^4}+\frac{3}{1+3^2+3^4}+\cdots+\frac{100}{1+100^2+100^4}$ 的值。（1 分）

4. A student is given a budget of \$10000 to produce a rectangular banner for a school function. The length and width (in metres) of the banner must be integers. If each metre in length costs \$330 while each metre in width costs \$450, what is the maximum area (in m^2) of the banner that can be produced? (1 mark)
一名學生要為學校的活動製作一幅長方形的宣傳橫額，開支上限為 \$10000。橫額的長度和闊度（以米為單位）必須是整數。若製作橫額每長一米收費 \$330，每闊一米收費 \$450，問可製作的橫額的面積最大是多少平方米？（1 分）

5. On the xy-plane, find the number of triangles whose vertices have integer coordinates (x,y) satisfying $1\le x\le 4$ and $1\le y\le 4$. (1 mark)
在 xy 平面上，有些三角形的所有頂點 (x,y) 皆是滿足 $1\le x\le 4$ 和 $1\le y\le 4$ 的整數。求這樣的三角形的數目。（1 分）

6. If m is a positive integer not exceeding 1000 and the fraction $\frac{m+4}{m^2+7}$ is in its lowest term, how many possible values of m are there? (1 mark)
若 m 是不超過 1000 的正整數，且 $\frac{m+4}{m^2+7}$ 是最簡分數，問 m 有多少個可能值？（1 分）

7. A triangle has two medians of lengths 9 and 12. Find the largest possible area of the triangle. (Note: A median is a line segment joining a vertex of the triangle to the mid-point of the opposite side.) (1 mark)
某三角形其中兩條中線的長度為 9 和 12。求該三角形的最大可能面積。（註：中線是指連起三角形一個頂點及其對邊的中點的線段。）（1 分）

8. Find the smallest positive integer k such that the equation $2xy-3x-5y=k$ has an odd number of positive integral solutions. (1 mark)
求最小的正整數 k，使方程 $2xy-3x-5y=k$ 的正整數解數目為奇數。（1 分）

9. In ΔABC, $\angle B = 60°$, $\angle C = 90°$ and $AB = 1$. BCP, CAQ and ABR are equilateral triangles outside ΔABC. QR meets AB at T. Find the area of ΔPRT. (1 mark)

在 ΔABC 中，$\angle B = 60°$、$\angle C = 90°$、$AB = 1$。BCP、CAQ 和 ABR 為 ΔABC 外的等邊三角形。QR 交 AB 於 T。求 ΔPRT 的面積。（1 分）

10. Find the number of triples (a, b, c) of real numbers such that the equation $|ax+by+cz|+|bx+cy+az|+|cx+ay+bz|=|x|+|y|+|z|$ holds for all real numbers x, y, z. (1 mark)

求使得方程 $|ax+by+cz|+|bx+cy+az|+|cx+ay+bz|=|x|+|y|+|z|$ 對所有實數 x、y、z 皆成立的實數三元數組 (a, b, c) 的數目。（1 分）

11. When n fair dice are thrown, the probability of obtaining a sum of 2005 and the probability of obtaining a sum of S are both equal to a positive number p. Find the smallest possible value of S. (1 mark)

投擲 n 顆公平的骰子時，擲得點數總和為 2005 及點數總和為 S 的概率皆等於某個正數 p。求 S 的最小可能值。（1 分）

12. $ABCD$ and $EFGH$ are squares of side length 1, and $AB \parallel EF$. The overlapped region of the two squares has area $\frac{1}{16}$. Find the minimum distance between the centres of the two squares. (2 marks)

$ABCD$ 和 $EFGH$ 皆是邊長為 1 的正方形，且 $AB \parallel EF$。兩個正方形的重疊部分的面積為 $\frac{1}{16}$。求兩個正方形的中心的距離的最小可能值。（2 分）

13. An ant crawls along the edges of a cube with side length 1 unit. Starting from one of the vertices, in each minute the ant travels from one vertex to an adjacent vertex. After crawling for 7 minutes, the ant is at a distance of $\sqrt{3}$ units from the starting point. Find the number of possible routes the ant has taken. (2 marks)

一隻螞蟻沿著一個邊長 1 單位的正方體的邊爬行。牠從其中一個頂點出發，每分鐘均會從一個頂點走到另一個相鄰的頂點。走了 7 分鐘後，螞蟻距離起點 $\sqrt{3}$ 單位。該螞蟻所走的路線有多少個不同的可能？（2 分）

14. In a school there are 1000 students, numbered 1 to 1000. A group of 500 students is said to be a ‘good group’ if there exists a student in the group whose number divides the number of another student in the group, and is said to be a ‘bad group’ if otherwise. For instance, the 500 students with numbers 1 to 500 form a ‘good group’ because 13 divides 26 and both students 13 and 26 are in the group. A ‘good student’ is a student who does not belong to any ‘bad group’. Find, among the ‘good students’, the one with the largest student number. (2 marks)

某校有 1000 名學生，分別編號為 1 至 1000。當中任何 500 名學生中，若有一人的編號整除另一人的編號，則這 500 名學生稱為「好群組」，否則稱為「壞群組」。例如：編號 1 至 500 的學生組成一個「好群組」，因為編號 13 和 26 的學生均在這群組中，而且 13 整除 26。若某名學生不屬於任何「壞群組」，則稱為「好學生」。在所有「好學生」中，求編號最大的一個。（2 分）

15. $ABCD$ is a rhombus with $\angle B = 60°$. P is a point inside $ABCD$ such that $\angle APC = 120°$, $BP = 3$ and $DP = 2$. Find the difference between the lengths of AP and CP. (2 marks)

$ABCD$ 是菱形，當中 $\angle B = 60°$。P 是 $ABCD$ 內的一點，使得 $\angle APC = 120°$、$BP = 3$、$DP = 2$。求 AP 與 CP 的長度之差。 （2 分）

16. Let n be a positive integer. When n is divided by 902, 802 and 702, the remainders are 602, 502 and 402 respectively. Find the minimum remainder when n is divided by 2005. (2 marks)

設 n 為正整數。當 n 除以 902、802 及 702 時，其餘數分別是 602、502 及 402。求 n 除以 2005 時的餘數的最小值。 （2 分）

17. 5555 children, numbered 1 to 5555, sit around a circle in order. Each child has an integer in hand. The child numbered 1 has the integer 1; the child numbered 12 has the integer 21; the child numbered 123 has the integer 321 and the child numbered 1234 has the integer 4321. It is known that the sum of the integers of any 2005 consecutive children is equal to 2005. What is the integer held by the child numbered 5555? (2 marks)

有 5555 名小孩，他們編號為 1 至 5555，並順序圍圈而坐。每人手上均有一個整數：編號為 1 的小孩手中的整數為 1，編號為 12 的小孩手中的整數為 21，編號為 123 的小孩手中的整數為 321，編號為 1234 的小孩手中的整數為 4321。已知任意連續 2005 位小孩手上的整數之和均為 2005。問編號為 5555 的小孩手中的整數是甚麼？ （2 分）

18. If $\dfrac{a(b-c)}{b(c-a)} = \dfrac{b(c-a)}{c(b-a)} = r$ and $r > 0$, find r. (2 marks)

若 $\dfrac{a(b-c)}{b(c-a)} = \dfrac{b(c-a)}{c(b-a)} = r$，且 $r > 0$，求 r。 （2 分）

19. Let O be the origin, $A_1, A_2, A_3, \ldots$ be points on the curve $y = \sqrt{x}$ and $B_1, B_2, B_3, \ldots$ be points on the positive x-axis such that the triangles OB_1A_1, $B_1B_2A_2$, $B_2B_3A_3$, … are all equilateral, with side lengths l_1, l_2, l_3, … respectively. Find the value of $l_1 + l_2 + l_3 + \cdots + l_{2005}$. (2 marks)

設 O 為原點，A_1、A_2、A_3、$\cdots$ 為曲線 $y = \sqrt{x}$ 上的點，B_1、B_2、B_3、$\cdots$ 為正 x 軸上的點，使得 OB_1A_1、$B_1B_2A_2$、$B_2B_3A_3$、$\cdots$ 皆是正三角形，邊長分別為 l_1、l_2、l_3、$\cdots$。求 $l_1 + l_2 + l_3 + \cdots + l_{2005}$ 的值。 （2 分）

20. Let x, y be acute angles such that $\sin y = 2005\cos(x+y)\sin x$. Find the greatest possible value of $\tan y$. (3 marks)

設 x、y 為銳角，且 $\sin y = 2005\cos(x+y)\sin x$。求 $\tan y$ 的最大可能值。 （3 分）

End of Paper

全卷完